AD13-CINEMATIQUE

Document 1 : cinématique

En physique, la **cinématique** est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent, ou, plus exactement, c'est l'étude de tous les mouvements possibles. Au côté de la notion d'espace qui fut l'objet de la géométrie, la cinématique introduit en outre la notion du temps.

On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon le 20 janvier 1700 devant l'Académie royale des sciences de Paris. À cette occasion il définit la notion d'accélération et montre comment il est possible de la déduire de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

Toute figure mobile peut être regardée comme un système de points mobiles, il est alors naturel de commencer par l'étude du mouvement du point mobile isolé.

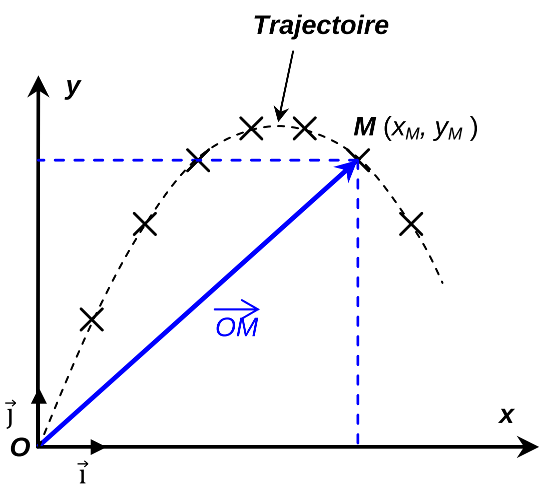
Wikipedia

Document 2 : Position

Pour décrire le mouvement, il faut un repère c'est-à-dire un système d'axes **lié** à un objet pris comme référence : le référentiel.

L'étude sera réalisée ici dans le repère orthonormé (O, i, j) lié au référentiel terrestre.

Supposons un point M susceptible de se déplacer dans un plan. Ses coordonnées sont x et y. Son déplacement va entraîner l'évolution de ses coordonnées, elles seront alors notées x(t) et y(t) car elles dépendent du temps. L'ensemble des positions occupées par le point M au cours du temps est appelé trajectoire. On parle aussi d'équation horaire du mouvement.



$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{\imath} + y(t).\vec{\jmath}$$

Les coordonnées du point M sont M : | $x(t) = 3t^2 - 6t + 2$
| $y(t) = -2t^2 + 5t - 3$ où x et y sont en m et t en s.

Document 3 : Vitesse et vecteur vitesse

Le vecteur vitesse caractérise la variation du vecteur position en fonction du temps.

Dans un référentiel donné, à chaque instant, le vecteur vitesse instantanée d'un point M est la dérivée de son vecteur position par rapport au temps.

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\,\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$$

$\vec{v}\begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{v(t)} = v_x(t).\vec{\imath} + v_y(t).\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{v_x(t)} = v_x(t).\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{v_y(t)} = v_y(t).\vec{\jmath}$

La connaissance de x(t) et de y(t) permet de connaître les coordonnées du vecteur vitesse.

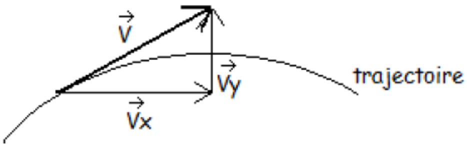
$v_x(t)$ est la dérivée de x(t), on note en physique $v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$

$v_y(t)$ est la dérivée de y(t), on note en physique $v_y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt}$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement.

La valeur de la vitesse (norme du vecteur pour les mathématiciens) à une date donnée est

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$



L'unité S.I. de la vitesse est le $m.s^{-1}$

Document 4 Accélération et vecteur accélération

Le vecteur accélération représente la variation du vecteur vitesse par unité de temps.
Le vecteur accélération est donc la dérivée du vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\,\overrightarrow{v(t)}}{dt}$$

$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{a(t)} = a_x(t).\vec{\imath} + a_y(t).\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{a_x(t)} = a_x(t).\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{a_y(t)} = a_y(t).\vec{\jmath}$

Les coordonnées du vecteur accélération sont les dérivés de celles du vecteur vitesse

$a_x(t)$ est la dérivée de $v_x(t)$, on note en physique $a_x(t) = \frac{d\,v_x(t)}{dt}$

De même $a_y(t)$ est la dérivée de $v_y(t)$, on note en physique $a_y(t) = \frac{d\,v_y(t)}{dt}$

La valeur de l'accélération à une date donnée $a(t) = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$

L'unité S.I. de l'accélération est le $m.s^{-2}$

Travail 1 : A partir des doc2, 3 et 4

1- Calculer les coordonnées du point M aux dates t = 1s et t = 3s.
2- En reprenant l'exemple du document 2, donner les expressions de Vx(t) et Vy(t).
En déduire les coordonnées du vecteur vitesse puis les valeurs de la vitesse aux dates t = 2s et t = 5s.
3- A l'aide des résultats trouvés à la question 2 pour Vx(t) et Vy(t), donner l'expression de $a_x(t)$ et $a_y(t)$ puis calculer les coordonnées du vecteur accélération et les valeurs de l'accélération à t = 1s et t =3s.

Travail 2 :

On considère un point M qui se déplace dans un plan. Ses coordonnées x et y (en mètres) peuvent être calculées à l'aide des expressions :
$x(t) = -t^3 + 11t^2 - 30\,t + 5$ et $y(t) = -t^2 + 8t + 3$ où t est en s
1. Calculer les cordonnées du point M pour toutes les secondes comprises entre 0 et 8 s. Représenter la trajectoire sur le document ci-après.
2. Donner les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Utiliser ces expressions pour représenter le vecteur vitesse aux dates t = 3 et t = 5 s. Calculer la vitesse à ces deux dates et représenter le vecteur vitesse (préciser l'échelle choisie).
3. Donner les expressions de $a_x(t)$ et $a_y(t)$. Utiliser ces expressions pour représenter le vecteur accélération aux dates t = 2s , t = 4 s et t = 5s (préciser l'échelle choisie). Calculer l'accélération à ces deux dates. Commenter sa position par rapport à la trajectoire.

Travail 3 :

Les équations horaires d'un point en mouvement sont : $x(t) = 5t - 5$ et $y(t) = -t^2 + 8t + 3$

1. montrer que le point passe par un point d'altitude maximale y_{max} à une date que l'on précisera.
2. Retrouver l'équation de la trajectoire y = f(x).

Travail 4 :

Le vecteur vitesse d'un point a pour composantes $v_x(t) = 3t^2 - 4t + 3$ et $v_y(t) = -6t^2 + 2t - 5$.
Retrouver l'expression des coordonnées de ce point sachant qu'à l'instant t =1s sa position est x(1s) = 4 et y(1s) = -3