CHAP8-MOUVEMENTS DANS DES CHAMPS DE PESANTEUR ET ELECTROSTATIQUE UNIFORMES

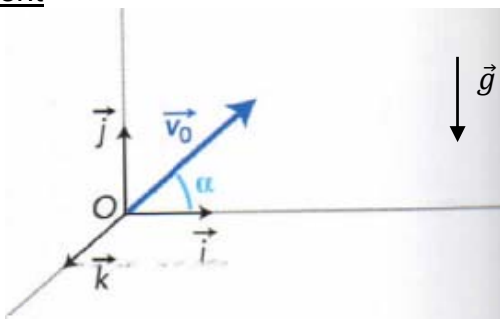
I Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

On étudie le mouvement d'une bille de masse m et de centre d'inertie G dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Cette bille est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical.

Bilan des forces extérieures qui s'exercent sur la bille : son poids et les frottements de l'air sur la bille.

Un objet est dit en chute libre s'il n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{P}$.
Dans le vide, toutes les chutes sont **libres**.
Dans l'air, une chute est considérée comme libre si **la force de frottement et la poussée d'Archimède sont négligeables** devant le poids de l'objet. C'est le cas dans l'étude qui suit.

1. Équation du mouvement



D'après la deuxième loi de Newton appliquée à la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a_G}$ soit $\boxed{\vec{a_G} = \vec{g}}$

Le mouvement d'un objet en chute libre est indépendant de sa masse.

Cette relation est vectorielle.
On peut obtenir trois relations scalaires en la projetant dans un repère.

On choisit l'origine des dates t=0 à l'instant où la bille est lancée.
On choisit un repère d'espace (O,x,y,z) avec l'origine O au niveau de la position initiale et l'axe des altitudes (Oz) vertical dirigé vers le haut :

$$\vec{a}_G\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les trois relations scalaires découlant de la deuxième loi de Newton sont : $\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$

L'équation du mouvement de la bille est $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g}$

2. Résolution analytique

Par intégration : $\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -gt + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$

On détermine k_1, k_2 et k_3 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_x(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin\alpha \\ v_z(0) = 0 \end{pmatrix}$ donc

$\begin{cases} k_1 = v_0 \cos\alpha \\ k_2 = v_0 \sin\alpha \\ k_3 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$

On intègre une deuxième fois : $\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha + k_4 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + k_5 \\ z(t) = k_6 \end{cases}$

On détermine k_4, k_5 et k_6 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} k_4 = 0 \\ k_5 = 0 \\ k_6 = 0 \end{cases}$ et

$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}}$ On a obtenu l'équation horaire paramétrique de la trajectoire.

Conclusion sur le mouvement de G :
Le mouvement de G est plan (z(t)=0 pour tout t)
Le mouvement de G est uniformément accéléré ($\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$).
Le mouvement de G est uniforme suivant l'axe horizontal (v_x=cte).
Le mouvement de G est uniformément varié suivant l'axe vertical (a_y=cte).

3. Équation de la trajectoire

On utilise les équations paramétriques :

$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}$ De la première on tire : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

d'où $y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + x \tan\alpha$

y(x) est un polynôme du 2° degré représenté par une parabole dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.
La trajectoire de la bille dépend de la valeur et de l'inclinaison de la vitesse initiale.

Points particuliers :

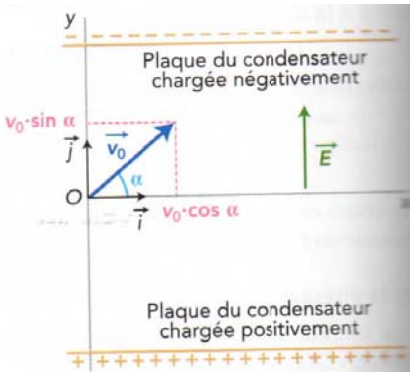
- le sommet de la parabole correspond à v_y=0
- la portée maximale correspond à y=0 ce qui correspond à α=45°

II Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

On étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge q placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Cette particule possède la vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical.
Si q est un électron q=-e <0 et si q est un proton q=+e >0

Bilan des forces extérieures qui s'exercent sur la particule :

- son poids
- les frottements de l'air
- la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$



exercice 20 page 176 : on démontre que les valeurs du poids et des frottements de l'air sont négligeables devant celle de la force électrostatique.

1. Équation du mouvement

D'après la deuxième loi de Newton appliquée à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ soit $\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$

On choisit l'origine des dates t=0 à l'instant où la particule est lancée.
On choisit un repère d'espace (O,x,y,z) avec l'origine O au niveau de la position initiale et l'axe des altitudes (Oz) vertical dirigé vers le haut :

$$\vec{a(t)}\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les trois relations scalaires découlant de la deuxième loi de Newton sont : $\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{qE}{m} \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$

L'équation du mouvement de la bille est $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m}}$

2. Résolution analytique

Par intégration : $\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = \dfrac{qE}{m}t + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$

On détermine k_1, k_2 et k_3 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_x(0) = v_0\cos\alpha \\ v_y(0) = v_0\sin\alpha \\ v_z(0) = 0 \end{pmatrix}$ donc

$\begin{cases} k_1 = v_0\cos\alpha \\ k_2 = v_0\sin\alpha \\ k_3 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{qE}{m}t + v_0\sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$

On intègre une deuxième fois : $\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha + k_4 \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha + k_5 \\ z(t) = k_6 \end{cases}$

On détermine k_4, k_5 et k_6 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} k_4 = 0 \\ k_5 = 0 \\ k_6 = 0 \end{cases}$ et

$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}}$ On a obtenu l'équation horaire paramétrique de la trajectoire.

Conclusion sur le mouvement

Le mouvement de G est plan (z(t)=0 pour tout t)

Le mouvement de G est uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$).

Le mouvement de G est uniforme suivant l'axe horizontal (v_x=cte).

Le mouvement de G est uniformément varié suivant l'axe vertical (a_y=cte).

3. Équation de la trajectoire

On utilise les équations paramétriques :

$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}$ De la première on tire : $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$

d'où $y = \dfrac{qE}{2m}\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha = \dfrac{qE}{2m}\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + x\tan\alpha$

y(x) est un polynôme du 2° degré représenté par une parabole dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.
La trajectoire de la particule dépend de la valeur et de l'inclinaison de la vitesse initiale mais aussi de la masse et de la charge de la particule.

Points particuliers : -le sommet de la parabole correspond à v_y=0
-la portée maximale correspond à y=0 ce qui correspond à α=45°