

	Langages et programmation	NSI T <sup>ale</sup>
	Récurtivité	Cours/TD

## 1. Définition

- Larousse :

- récurtivité :

*Propriété que possède une règle ou un élément constituant de pouvoir se répéter de manière théoriquement indéfinie. (C'est une propriété essentielle des règles d'une grammaire générative, celle qui permet d'engendrer un nombre infini de phrases.)*

*Qualité d'un programme informatique récurtif.*

*Théorie destinée à fournir un cadre rigoureux à l'étude des notions intuitives de calculabilité et de décidabilité effectives. (Church a montré [1936] que la récurtivité est l'équivalent mathématique de la calculabilité effective : la fonction récurtive est une fonction rigoureusement calculable.)*

- récurtif :

*Se dit d'une règle ou d'un élément doués de récurtivité.*

*Se dit d'un programme informatique organisé de manière telle qu'il puisse se rappeler lui-même, c'est-à-dire demander sa propre exécution au cours de son déroulement.*

Avec au passage, un bel exemple de récurtivité (croisée).

- Wikipédia :

*La récurtivité est une démarche qui fait référence à l'objet même de la démarche à un moment du processus. En d'autres termes, c'est une démarche dont la description mène à la répétition d'une même règle. Ainsi, les cas suivants constituent des cas concrets de récurtivité :*

- décrire un processus dépendant de données en faisant appel à ce même processus sur d'autres données plus « simples » ;*
- montrer une image contenant des images similaires ;*
- définir un concept en invoquant le même concept ;*
- écrire un algorithme qui s'invoque lui-même ;*
- définir une structure à partir de l'une au moins de ses sous-structures.*

## 2. Exemples

### Processus récursif

1. Calcul de la fonction dérivée d'une fonction dérivable

Entrée : **f** (une fonction dérivable) - Sortie : **f'** (la fonction dérivée)

```
derivee(f) =  
  si f est une fonction élémentaire de base  
    renvoyer sa dérivée  
  sinon si f == u+v  
    renvoyer derivee(u) + derivee(v)  
  sinon si f == u × v  
    renvoyer derivee(u)×v + u×derivee(v)  
  sinon si ...
```

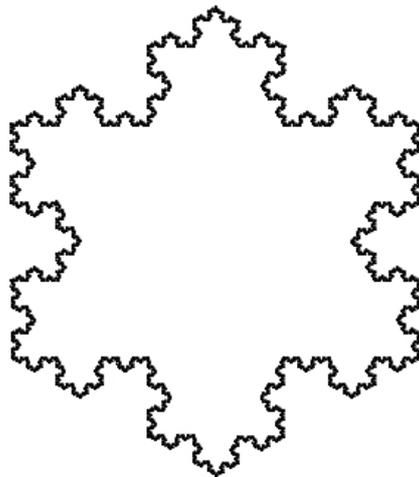
2. Production de fractales : le flocon de Von Koch (Voir le flocon animé)

On dispose de la primitive *tracer(l)* qui permet de tracer un segment de longueur *l*.

Le processus de tracé d'un segment de Von Koch de taille *l* à l'ordre *n* est :

```
vonkoch(l,n)  
  si n = 1, tracer(l)  
  sinon  
    vonkoch(l/3,n-1)  
    tourner à gauche de 60°  
    vonkoch(l/3,n-1)  
    tourner à droite de 120°  
    vonkoch(l/3,n-1)  
    tourner à gauche de 60°  
    vonkoch(l/3,n-1)
```

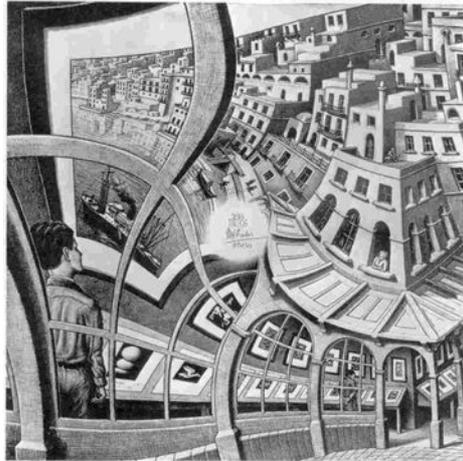
Le flocon est obtenu en traçant 3 segments de von koch séparés par des rotations à droite de 120°.



*NB* Se réalise très bien avec la tortue (module `turtle`), *tracer(l)* = `forward(l)` et les fonctions `right` et `left` permettent les rotations

## Images

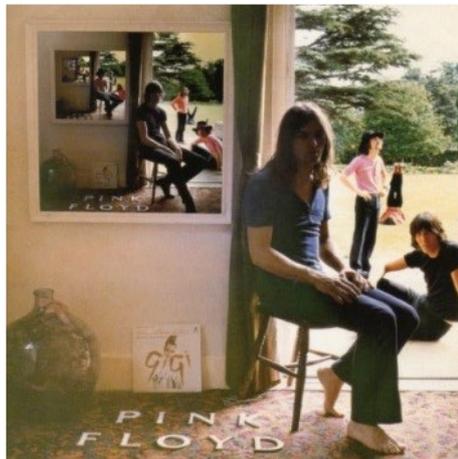
- *Print gallery* M.C.Escher (Voir la mise en abîme)



- *La vache qui rit* (Voir la mise en abîme)



- *Pochette Ummagumma* de Pink Floyd



## Sigles

- VISA : VISA International Service Association
- GNU : GNU is Not Unix
- WINE : Wine Is Not an Emulator
- Bing : Bing is not Google (non officiel)
- LAME : Lame Ain't an MP3 Encoder

## Grammaire

Un *groupe nominal* est composé d'un nom ou d'un nom et son complément. Le complément d'un nom est soit un adjectif, soit un adverbe, soit un *groupe nominal*. (très approximativement)

```
groupe_nominal ::= nom
                 | nom complément
complément      ::= adjectif
                 | adverbe
                 | groupe_nominal
```

## Algorithme récursif

Le *tri rapide* :

```
partitionner(tableau T, entier premier, entier dernier, entier pivot)
    échanger T[pivot] et T[dernier]
    // échange le pivot avec le dernier du tableau , le pivot devient le dernier
    du tableau
    j := premier
    pour i de premier à dernier - 1
        // la boucle se termine quand i = (dernier-1).
        si T[i] <= T[dernier] alors
            échanger T[i] et T[j]
            j := j + 1
    échanger T[dernier] et T[j]
    renvoyer j

tri_rapide(tableau T, entier premier, entier dernier)
    si premier < dernier alors
        pivot := choix_pivot(T, premier, dernier)
        pivot := partitionner(T, premier, dernier, pivot)
        tri_rapide(T, premier, pivot-1)
        tri_rapide(T, pivot+1, dernier)
```

## Structures récursives

*listes, arbres, graphes qu'on verra en cours d'année*

### 3. Algorithmes récursifs

#### Définition

Un algorithme de résolution d'un problème  $P$  sur une donnée  $a$  est dit **récursif** si parmi les opérations utilisées pour le résoudre, on trouve la résolution du même problème  $P$  sur une donnée  $b$ .

Dans un algorithme récursif, on nomme **appel récursif** toute étape de l'algorithme résolvant le même problème sur une autre donnée.

## Exemple

Ne faisons pas dans l'originalité : **fonction factorielle**

**$n! = n \times (n-1)!$  si  $n > 1$  et  $0! = 1$**

Principe :

```
5! = 5 x 4!
    = 5 x 4 x 3!
    = 5 x 4 x 3 x 2!
    = 5 x 4 x 3 x 2 x 1!
    = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 x 0!
    = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 x 1
    = 120
```

## Programmation

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)

>>> fact(5)
120
```

## Déroulement de l'exécution

Mise en évidence :

- avec le debugger de Thonny
- avec [PythonTutor](#)
- utilisation d'un décorateur (défini dans `recursivite_decorators.py`, fourni).

```
from recursivite_decorators import *

@trace
def fact(n):
    ...
```

On observe la construction de la pile des appels successifs de la fonction. Chaque appel possède son propre environnement, donc ses propres variables.

La pile est nécessaire pour mémoriser les valeurs propre à chaque appel.

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        result = 1
    else:
        next_value = n-1
        result = n * fact(next_value)
    return result

>>> fact(5)
120
```

Dans [PythonTutor](#)

**Attention** En Python la taille de la pile des appels récursifs est limitée. Si la récursivité est trop profonde et que l'on atteint cette limite, on déclenche une `RecursionError`.

La valeur de cette pile peut être obtenue par :

```
>>> import sys
>>> sys.getrecursionlimit()
3000
```

et modifiée par

```
>>> sys.setrecursionlimit(100)
>>> fact(100)
Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell>", line 1, in <module>
  File "recursivite.py", line 16, in fact
    return n * fact(n-1)
  ...
  File "recursivite.py", line 13, in fact
    if n <= 1:
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

## Éléments Caractéristiques

1. **il faut au moins une situation qui ne consiste pas en un appel récursif**

```
if n <= 1:
    return 1
```

Cette situation est appelée **situation de terminaison** ou **situation d'arrêt** ou **cas d'arrêt** ou **cas de base**.

2. **chaque appel récursif doit se faire avec des données qui permettent de se rapprocher d'une situation de terminaison**

```
return n * fact(n-1)
```

Il faut s'assurer que la situation de terminaison est atteinte après un nombre fini d'appels récursifs.

La preuve de terminaison d'un algorithme récursif se fait en identifiant la construction d'une **suite strictement décroissante d'entiers positifs ou nuls**.

Dans le cas de factorielle, il s'agit simplement de la suite des valeurs du paramètre.

### **Mauvaise conception récursive**

Respecter la première règle ne suffit pas :

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        return fact(n+1) / (n+1)
```

## Un autre exemple

Il faut trouver un énoncé récursif de résolution du problème, c'est-à-dire un énoncé qui fasse référence au problème lui-même.

*Exemple* : calculer le nombre d'occurrences d'un caractère dans une chaîne.

*Énoncé* : Le **nombre d'occurrences** de *c* dans *s* est 0 si *s* est vide.

Si *c* est le premier caractère de *s*, on ajoute 1 au **nombre d'occurrences** de *c* dans les autres caractères de *s*. Sinon, il s'agit du **nombre d'occurrences** de *c* dans les autres caractères de *s*.

```
def occurrences(c, s):
    if s == "":
        return 0
    elif c == s[0]:
        return 1 + occurrences(c, s[1:])
    else:
        return occurrences(c, s[1:])
```

La terminaison se vérifie en considérant la suite des longueurs des chaînes passées en paramètre.

## Récurtivité terminale

Un algorithme récursif simple est **terminal** lorsque **l'appel récursif est le dernier calcul effectué** pour obtenir le résultat. Il n'y a pas de "calcul en attente". L'avantage est qu'il n'y a rien à mémoriser dans la pile.

Ce n'est pas le cas des deux exemples précédents `fact` et `occurrences`.

### Exemple d'algorithme récursif terminal

Prédicat de présence d'un caractère dans une chaîne :

*Un caractère **c est présent** dans une chaîne **s non vide**, s'il est le premier caractère de **s** ou s'il **est présent** dans les autres caractères de **s**. Il n'est pas présent dans la chaîne vide.*

```
def est_present(c, s):
    if s == '':
        return False
    elif c == s[0]:
        return True
    else:
        return est_present(c, s[1:])
```

Voir le comportement avec [PythonTutor](#), le debugger de Thonny ou le décorateur `@trace`.

### Rendre terminal un algorithme récursif

On utilise un accumulateur, passé en paramètre, pour calculer le résultat au fur et à mesure des appels récursifs.

La valeur de retour du cas de base devient la valeur initiale de l'accumulateur et lors d'un appel récursif, le "calcul en attente" sert à calculer la valeur suivante de l'accumulateur.

Ainsi on obtient :

```
def fact_term(n, acc = 1):
    if n <= 1:
        return acc
    else:
        return fact_term(n-1, acc * n)
```

et

```
def occurrences_term(c, s, acc = 0):
    if s == "":
        return acc
    elif c == s[0]:
        return occurrences_term(c, s[1:], acc + 1)
    else:
        return occurrences_term(c, s[1:], acc)
```

## Récurtivité croisée

La définition précédente des algorithmes récursifs ne couvre pas les cas des algorithmes *mutuellement récursifs*.

Exemple typique (et très classique) :

```
def pair(n):
    if n == 0:
        return True
    else:
        return impair(n-1)

def impair(n):
    if n == 0:
        return False
    else:
        return pair(n-1)
```

## Récurtivité multiple

Un algorithme récursif est multiple si l'un des cas qu'il distingue se résout avec plusieurs appels récursifs.

C'était le cas de l'algorithme de dérivation.

Autre exemple avec le [tri rapide](#)

### Retour sur les coefficients binomiaux

(ou un exemple où la récursivité, bien que naturelle, n'est pas adaptée)

Dans une séance précédente on a utilisé comme exemple les coefficients binomiaux avec pour formule de calcul :  
 $C(n,p) = n! / p!(n-p)!$

Mais vous connaissez aussi la relation de récurrence :

- $C(n,p) = 1$  si  $n=p$  ou  $p=0$
- $C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1)$  pour  $n > p > 0$

Ce qui donnerait en Python

```
def C(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    elif n==p:
        return 1
    else:
        return C(n-1,p-1) + C(n-1,p)
```

Examinez la trace produite en ajoutant le décorateur `@trace...`

On peut observer l'explosion combinatoire du nombre d'appels récursifs et les redondances des calculs. Ce nombre d'appels peut-être mis en évidence en utilisant un autre décorateur fourni : `@count`. Celui-ci ajoute à la fonction qu'il décore une propriété `counter` qui représente un compteur du nombre d'appels de cette fonction. On peut l'utiliser ainsi :

```
@count
def C(n,p)
    ...

>>> C.counter = 0      # on (ré)initialise le compteur pour la fonction C
>>> C(10,3)
...
120
>>> C.counter         # accès au nombre d'appels de C depuis la dernière remise à 0
239
```

Dans un tel cas, si on veut utiliser efficacement la récursivité, il faudrait la coupler à un mécanisme de **memoïstation** ([Wikipedia](#)) qui permet d'éviter de refaire plusieurs fois le même calcul.

## Structures récursives

Les listes Python sont des listes à "base de tableau". D'ailleurs le programme de NSI parle explicitement de tableaux et mentionne "*Python identifie listes et tableaux*". En fait les listes de Python sont des **tableaux dynamiques**, c'est-à-dire des tableaux dont la taille peut varier. Il n'en est pas de même dans tous les langages (exemple Java) (NB : en javascript, le type `Array` se comporte comme les listes Python).

De manière plus formelle, les listes sont des structures de données dynamiques et intrinsèquement récursives. Elles se définissent ainsi :

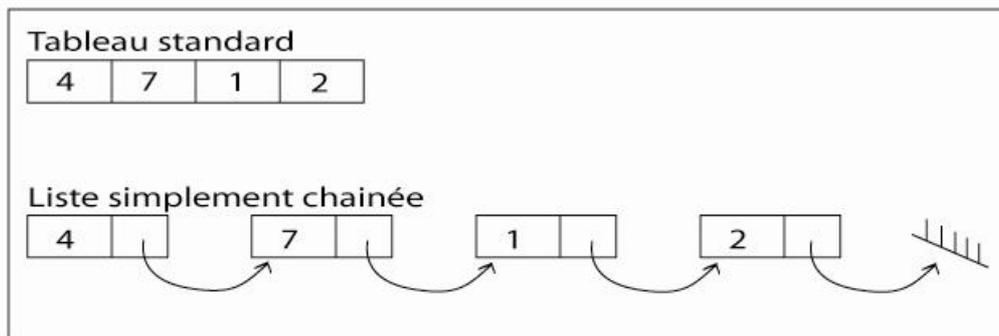
Une liste d'éléments de type **T** est

- soit la liste vide
- soit un couple  $(t, R)$  où  $t$  est de type **T** et  $R$  est une liste d'éléments de type **T**

Dans le cas d'une liste non vide  $(t, R)$  :

- $t$  est le premier élément de la liste aussi appelée **tête** de la liste
- $R$  est la liste des éléments qui suivent  $t$ , également appelée **reste** de la liste

On parle pour de telles structures de **listes chaînées**, qui se distingue donc des listes par tableaux.



Les listes chaînées sont par exemple beaucoup plus efficaces que les listes par tableaux lorsqu'il s'agit de supprimer un élément de la liste, ou d'en insérer un.

Avec cette définition des listes, la définition d'une constante pour la liste vide  $([])$  et de primitives permettant

- de construire un couple  $(x, R)$   $([x] + R)$
- d'accéder à la tête d'une liste non vide  $(l[0])$
- d'accéder au reste d'une liste non vide  $(l[1:])$  suffit pour définir tous les traitements sur les listes. L'écriture de ces traitements se fait alors à l'aide de fonctions récursives.

Longueur d'une liste :

```
def length(liste):  
    if liste == [] :  
        return 0  
    else:  
        return 1 + length(liste[1:])
```

Nombre d'occurrences dans une liste :

```
def nb_occurrences(valeur, liste):  
    if liste == [] :  
        return 0 # quid de length(liste) == 0 ?  
    elif valeur == liste[0]:  
        return 1 + nb_occurrences(valeur, liste[1:])  
    else:  
        return nb_occurrences(valeur, liste[1:])
```

*NB* Le langage Lisp se basait sur cette structure de données (Lisp = List Processing).

Sera approfondi et revu avec la structure d'arbre qui est une autre structure récursive.

## 4. Quelques erreurs "classiques"

### attention aux effets de bord

(peut ne pas être une erreur, mais il faut être vigilant...)

```
def length_destroy(liste):
    '''
    >>> length_destroy([]) == 0
    True
    >>> length_destroy([1,2,3]) == 3
    True
    '''
    if liste == [] :
        return 0
    else:
        liste.pop() # pop() retire dernier élément de liste
        return 1 + length_destroy(liste)
```

Observons le comportement dans [PythonTutor](#)

### oubli du return

Pour certains, le `return` n'est pas nécessaire dans le cas récursif. Pour eux, le `return` du cas de base suffit, puisque l'on renvoie un résultat. Ils écrivent donc :

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        n * fact(n-1)
```

C'est encore plus vrai (pour eux) dans le cas d'un algorithme récursif terminal puisque, selon eux, le résultat est obtenu au cas d'arrêt...

```
def est_present(c,s):
    if s == '':
        return False
    elif c == s[0]:
        return True
    else:
        est_present(c,s[1:])
```

### absence de prise de conscience de la localité des environnements

Il s'agit d'une confusion entre une écriture itérative, basée sur des affectations de variables, et l'écriture récursive qui s'appuie sur la modification des paramètres.

Pour ces étudiants, les calculs sont faits (cf. l'incréméntation ci-dessous) et les appels récursifs aussi...

```
def occurrences_erreur(c,s):
    result = 0
    if s == "":
        result = 0
    elif c == s[0]:
        result = result + 1
        occurrences_erreur(c,s[1:])
    else:
        occurrences_erreur(c,s[1:])
    return result
```

Observons dans [PythonTutor](#)