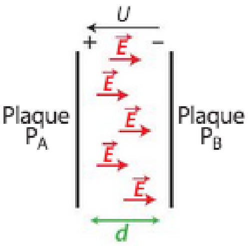
MOUVEMENT DANS UN CHAMP UNIFORME

Vu en première :
Un champ est une propriété de l'espace. Un champ vectoriel est représenté par un vecteur : il a une direction, un sens et une valeur.

Dans une région de l'espace, un champ vectoriel est **uniforme** s'il garde, en tout point de cette région, la même direction, le même sens et la même valeur.

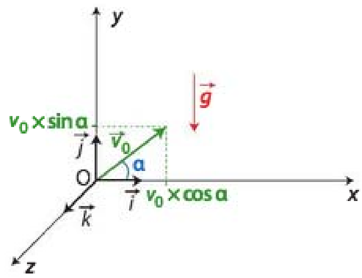
Dans une zone de l'espace de petites dimensions par rapport au rayon terrestre, le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ peut être considéré comme uniforme.
$\vec{g}$ est vertical, vers le bas, de valeur $g = 9{,}81\ N.kg^{-1} = 9{,}81\ m.s^{-2}$



Lorsqu'on applique une tension U entre les armatures d'un condensateur plan, il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ uniforme.
$\vec{E}$ est perpendiculaire aux armatures, orienté de l'armature positive vers la négative, de valeur $E = \frac{|U|}{d}$

I Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

- **système** étudié : point M ou système de centre de masse M, de masse m
- **référentiel** d'étude : référentiel terrestre supposé galiléen
- **repère** cartésien $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec l'origine O au niveau de la position initiale du point M et l'axe des altitudes (Oy) vertical dirigé vers le haut.
- **une seule force** appliquées au système : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ vertical, vers le bas, de valeur $P = mg$ (cas de la chute libre)



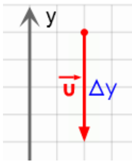
1. Détermination du vecteur accélération

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen,
$\vec{P} = m\vec{a}$ soit $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$.

Le vecteur accélération est vertical, vers le bas, de valeur constante.
Le mouvement d'un objet en chute libre est indépendant de sa masse.

Cette relation est vectorielle. On peut obtenir trois relations en la projetant dans le repère$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec l'origine O au niveau de la position initiale du point M et l'axe des altitudes (Oy) vertical dirigé vers le haut.

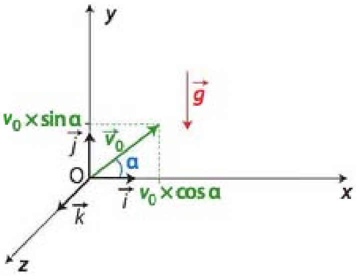
$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} ; \vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$



2. Détermination du vecteur vitesse

Comme $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$, pour déterminer les coordonnées du vecteur vitesse, il faut primitiver les coordonnées du vecteur accélération par rapport au temps.

$$\overrightarrow{a(t)}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$ On primitive pour trouver la vitesse : $$\overrightarrow{v(t)}\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -gt + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$$



On détermine k_1, k_2 et k_3 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\overrightarrow{v(0)} = \overrightarrow{v_0}$

avec $\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v(0)}\begin{cases} v_x(0) = k_1 \\ v_y(0) = -g \times 0 + k_2 \\ v_z(0) = k_3 \end{cases}$

en égalant les 2 expressions $\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} k_1 = v_0 \cos\alpha \\ k_2 = v_0 \sin\alpha \\ k_3 = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{\overrightarrow{v(t)}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}}$

Le mouvement de M est uniforme suivant l'axe horizontal car $v_x(t) = constante$

3. <u>Détermination du vecteur position</u>

Comme $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, pour déterminer les coordonnées du vecteur position, il faut primitiver les coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\overrightarrow{v(t)}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$ on **primitive** $$\overrightarrow{OM(t)}\begin{cases} x(t) = v_0\,\mathrm{t} \cos\alpha + k_4 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\,\mathrm{t} \sin\alpha + k_5 \\ z(t) = k_6 \end{cases}$$

On détermine k_4, k_5 et k_6 grâce aux **conditions initiales** : à t=0,
le point M est en O donc $\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{0M_0}$

avec $\overrightarrow{0M_0}\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM(0)}\begin{cases} x(0) = v_0 \times 0 \times \cos\alpha + k_4 \\ y(0) = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 \times \sin\alpha + k_5 \\ z(0) = k_6 \end{cases}$

en égalant les 2 expressions $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} k_4 = 0 \\ k_5 = 0 \\ k_6 = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM(t)}\begin{cases} x(t) = v_0\,\mathrm{t} \cos\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\,\mathrm{t} \sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}}$ Ceci est **l'équation horaire** de la trajectoire.

Rque : Le mouvement de M est plan car z(t)=0 pour tout t.

4. <u>Détermination de l'équation de la trajectoire</u>

Le mouvement étant plan, l'équation de la trajectoire est la **relation donnant y en fonction de x**. (Y=f(x))

On utilise les équations horaires : $\begin{cases} x(t) = v_0 \, \mathrm{t} \cos\alpha \quad (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \, \mathrm{t} \sin\alpha \quad (2) \\ z(t) = 0 \end{cases}$

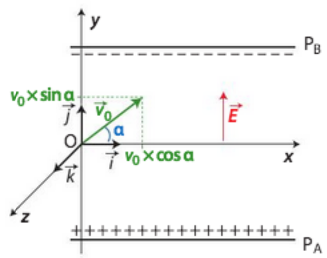
De la relation (1) on sort : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ et on injecte t dans la relation (2) ce qui donne

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + x \tan\alpha}$$

y(x) est un polynôme du 2° degré représenté par **une parabole** dans le plan vertical contenant $\overrightarrow{v_0}$.

Rque : La trajectoire du point M dépend de la valeur et de l'inclinaison de la vitesse initiale.
Cas particuliers : chute libre verticale ex 29 p255 ou cas où α =0 ou 90° ex 33 p256

II Mouvement dans un champ électrique uniforme



- **système** étudié : particule chargée M ou système chargé de centre de masse M, de charge q
- **référentiel** d'étude : référentiel terrestre supposé galiléen
- **repère** cartésien $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ avec l'origine O au niveau de la position initiale de la particule M et l'axe des altitudes (Oy) vertical dirigé vers le haut.
- **une seule force** appliquées au système : la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ verticale, vers le haut (dans l'exemple $\vec{E}$ vers le haut et q>0).
  En pratique, cela signifie que l'on néglige le poids de la particule devant la force électrique : mg<<qE.

1. Détermination du vecteur accélération

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen,
$\vec{F} = m\vec{a}$ soit $q\vec{E} = m\vec{a}$ et $\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$.

Le vecteur accélération est vertical, vers le haut, de valeur constante.
Il dépend de la masse et de la charge de la particule.

Cette relation est vectorielle. On peut obtenir trois relations en la projetant dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ avec l'origine O au niveau de la position initiale de la particule M et l'axe des altitudes (Oy) vertical dirigé vers le haut.

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \\ a_z = 0 \end{cases}$$

2. Détermination du vecteur vitesse

Comme $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$,pour déterminer les coordonnées du vecteur vitesse, il faut primitiver les coordonnées du vecteur accélération par rapport au temps.

$$\overrightarrow{a(t)}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \\ a_z = 0 \end{cases} \quad \text{On primitive :} \quad \overrightarrow{v(t)}\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = \frac{qE}{m} t + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 grâce aux **conditions initiales** : à t=0, $\overrightarrow{v(0)} = \overrightarrow{v_0}$

$$\text{avec} \quad \overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v(0)}\begin{cases} v_x(0) = k_1 \\ v_y(0) = \frac{qE}{m} \times 0 + k_2 \\ v_z(0) = k_3 \end{cases}$$

en égalant les 2 expressions $\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} k_1 = v_0 \cos\alpha \\ k_2 = v_0 \sin\alpha \\ k_3 = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = \frac{qE}{m} t + v_0 \sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases}}$

Le mouvement de la particule est uniforme suivant l'axe horizontal car $v_x = constante$.

3. Détermination du vecteur position

Comme $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, pour déterminer les coordonnées du vecteur position, il faut primitiver les coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps.

$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = \frac{qE}{m} t + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$ On primitive : $\overrightarrow{OM(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \,\mathrm{t} \cos\alpha + k_4 \\ y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \,\mathrm{t} \sin\alpha + k_5 \\ z(t) = k_6 \end{cases}$

On détermine k_4, k_5 et k_6 grâce aux **conditions initiales** : à t=0,
la particule M est en O donc $\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{0M_0}$

avec $\overrightarrow{0M_0} \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM(0)} \begin{cases} x(0) = v_0 \times 0 \times \cos\alpha + k_4 \\ y(0) = \frac{qE}{2m} 0^2 + v_0 \times 0 \times \sin\alpha + k_5 \\ z(0) = k_6 \end{cases}$

en égalant les 2 expressions $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} k_4 = 0 \\ k_5 = 0 \\ k_6 = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \,\mathrm{t} \cos\alpha \\ y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \,\mathrm{t} \sin\alpha \\ z(t) = 0 \end{cases}}$ Cette équation est **l'équation horaire** de la trajectoire

Le mouvement de la particule est plan (z(t)=0 pour tout t).

4. Détermination de l'équation de la trajectoire

Le mouvement étant plan, l'équation de la trajectoire est la relation donnant y en fonction de x (y=f(x)).

On utilise les équations horaires : $\overrightarrow{OM(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \,\mathrm{t} \cos\alpha \quad (1) \\ y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \,\mathrm{t} \sin\alpha \quad (2) \\ z(t) = 0 \end{cases}$

De la relation (1) on sort : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ et on injecte t dans la relation (2) ce qui donne

$y(x) = \frac{qE}{2m}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha$ soit $\boxed{y(x) = \frac{qE}{2m}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + x \tan\alpha}$

y(x) est un polynôme du 2° degré représenté par une parabole dans le plan contenant $\vec{v_0}$ et $\vec{E}$.

La trajectoire du point M dépend de la valeur et de l'inclinaison de la vitesse initiale.

Avec un champ électrique vertical vers le haut :

- si q>0, la particule rejoint la plaque négative avec une trajectoire parabolique.
- si q<0, la particule rejoint la plaque positive avec une trajectoire parabolique.