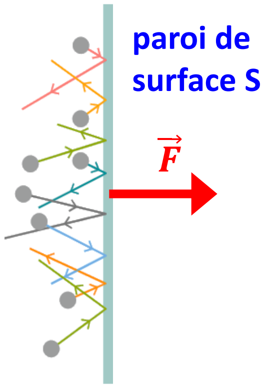
CHAP18 : MODELISATION DE L'ECOULEMENT D'UN FLUIDE

I. Rappels de première

① Force pressante

Les particules d'un fluide sont en mouvement permanent. Elles vont donc entrer en collision avec les parois. Si chaque choc n'a qu'une action très faible, en grand nombre, l'effet devient sensible à l'échelle macroscopique. C'est l'origine de la **force pressante**.



$\vec{F}$: force pressante

- direction : perpendiculaire à la paroi
- sens : du fluide vers la paroi
- valeur : dépend de la pression *P* du fluide et de la surface *S* de la paroi

P en N·m^{-2} ou pascal (Pa)

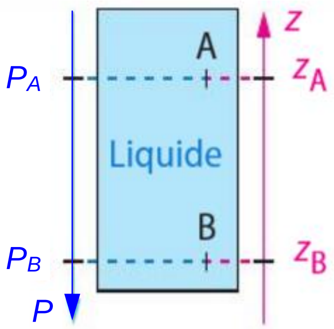
F en N $\quad F = P \times S$

S en m^2

② Loi fondamentale de la statique des fluides

La loi fondamentale de la statique des fluides permet :

- De relier la **différence de pression** entre deux positions dans un fluide incompressible et la **différence des coordonnées verticales** de ces positions ;
- D'en déduire la pression *P* en une position.



ρ en kg·m^{-3} $\quad$ z en m

$$P_B - P_A = \rho \times g \times (z_A - z_B)$$

P en Pa $\quad$ g en N·kg^{-1}

ρ : masse volumique du fluide

Conséquences de la loi fondamentale de la statique des fluides :

- La pression n'est pas uniforme dans tout le fluide. **Plus l'altitude est faible, plus la pression est grande.**
- La différence de pression entre 2 points A et B dépend de la **nature du liquide** et de la **différence d'altitude** entre ces deux points.

Remarque : Cette loi peut s'écrire $P + \rho g z = constante$

II. La poussée d'Archimède

① Origine de la poussée d'Archimède

- Lorsqu'un objet est immergé dans un fluide, ce dernier exerce une force pressante sur chaque partie de la surface du solide *(voir figure 1)*.

- Or cette force pressante dépend de la pression du fluide (voir partie I①).
  Pour une même altitude, la pression est constante ; donc les forces pressantes horizontales se compensent deux à deux :

  $\vec{F}_G + \vec{F}_H = \vec{0}$ et $\vec{F}_E + \vec{F}_F = \vec{0}$ *(sur la figure 1)*

- De plus, d'après la loi fondamentale de la statique des fluides (voir partie I②), la pression augmente avec la profondeur, il en est donc de même pour la force pressante :

  $\|\vec{F}_B\| > \|\vec{F}_A\|$ soit $F_B > F_A$ *(sur la figure 1)*

⇒ Les forces pressantes verticales ne se compensent pas et la résultante est TOUJOURS dirigée vers le haut.

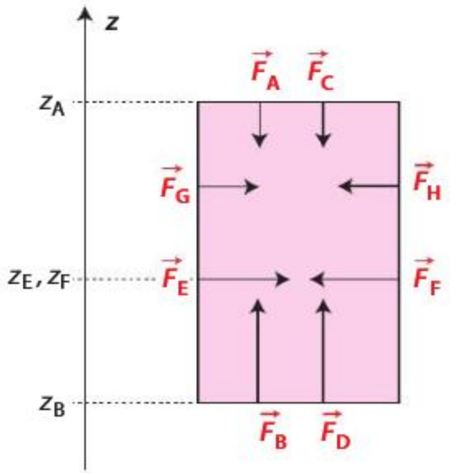


Figure 1 : Forces pressantes sur un corps immergé dans un fluide

- La **poussée d'Archimède** est la **résultante des forces pressantes** exercées par un fluide au repos sur la partie immergée d'un corps.
- Dans un fluide au repos, la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure d'un corps immergé est à l'origine de la poussée d'Archimède qui est **verticale** et **dirigée vers le haut**.

② Expression de la poussée d'Archimède

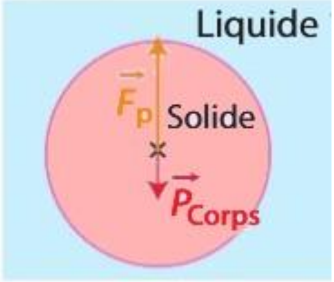


Figure 2

- Soit un corps (exemple : un solide) immergé dans un fluide (exemple : un liquide).
  Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le corps est soumis à :
  - son poids $\vec{P}_{coprs}$
  - la poussée d'Archimède $\vec{F}_P$

  → *voir figure 2*

  Remarque : sur la figure 2, la poussée d'Archimède est plus grande que le poids donc le corps n'est pas en équilibre mais remonte.

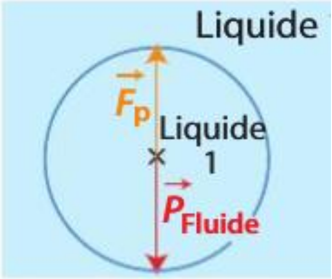


Figure 3

- Si on retire ce corps et qu'on considère la partie de fluide qui vient « remplacer » ce corps (on parle de « fluide déplacé »), alors cette partie de fluide est soumise :
  - à son propre poids $\vec{P}_{fluide}$
  - à la même force d'Archimède que précédemment $\vec{F}_P$

  → *voir figure 3*

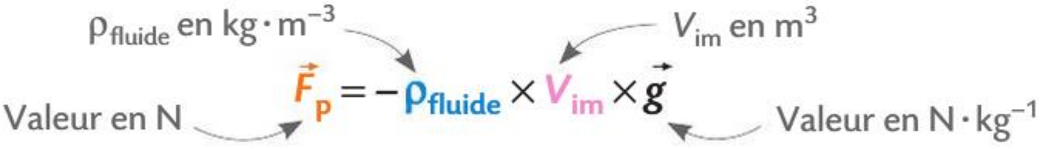
  Or cette partie de fluide est en équilibre, donc d'après la première loi de Newton (principe d'inertie), ces deux forces se compensent :

$$\vec{F}_P + \vec{P}_{fluide} = \vec{0}$$

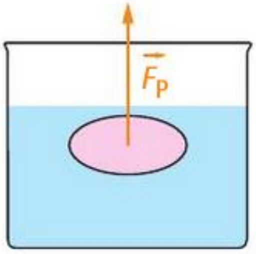
Donc : $\vec{F}_P = -\vec{P}_{fluide}$

→ La poussée d'Archimède est l'opposée du poids du fluide déplacé.

La **poussée d'Archimède** $\vec{F}_P$; exercée par un fluide de masse volumique ρ_{fluide} est une **force opposée au poids du fluide déplacé** :



$$\vec{F}_P = -\rho_{fluide} \times V_{im} \times \vec{g}$$



avec :

ρ_{fluide} : la masse volumique du fluide
V_{im} : le volume immergé du corps
g : l'intensité du champ de pesanteur

III. Ecoulement d'un fluide incompressible

① Régime permanent d'écoulement d'un fluide

- L'écoulement d'un fluide est modélisé par des **lignes de courant**.
  Ces lignes représentent les **trajectoires des particules du fluide** en mouvement.
  (→ voir figure 4)
- On dit qu'un fluide s'écoule en **régime permanent** (ou stationnaire) lorsque les lignes de courant n'évoluent pas au cours du temps : le **vecteur vitesse** $\vec{v}$ en un point quelconque du fluide **est constant** au cours du temps.

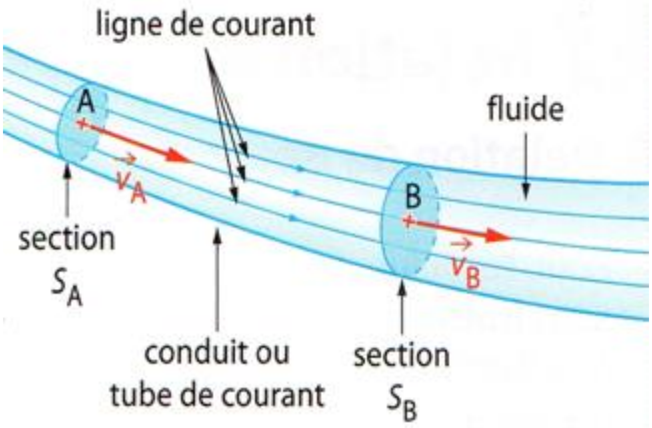


Figure 4 : Modélisation de l'écoulement d'un fluide incompressible

② Débit volumique et vitesse d'un fluide incompressible

Le **débit volumique** $\boldsymbol{D_v}$ d'un fluide représente le **volume de fluide qui traverse une section** $\boldsymbol{S}$ **par unité de temps** :

$$\underset{\text{en m}^3\text{.s}^{-1}}{D_v} = \frac{V \leftarrow \text{en m}^3}{\Delta t \leftarrow \text{en s}}$$

V étant le volume de fluide traversant la section S pendant la durée Δt.

Exemple : Chaque jour la Loire rejette près de 80×10⁶ m³ d'eau dans l'océan.
Son débit volumique moyen est :

$$D_v = \frac{80\times10^6\ m^3}{24\times3600\ s} \qquad D_v = 9{,}30\times10^2\ m^3.s^{-1}$$

Lien avec la vitesse du fluide ?

Pendant la durée Δt, le fluide qui traverse une section S parcourt, dans le tube qui le contient, la distance ℓ, avec une vitesse v *(→ voir figure 5)*. Le volume de fluide écoulé à travers la section S est : $V = S \times \ell$

Donc le débit volumique du fluide peut s'écrire : $D_v = \frac{S \times \ell}{\Delta t}$ Soit encore :

en m³.s⁻¹ → $D_v = S \times v$ ← *en m²*, *en m.s⁻¹*

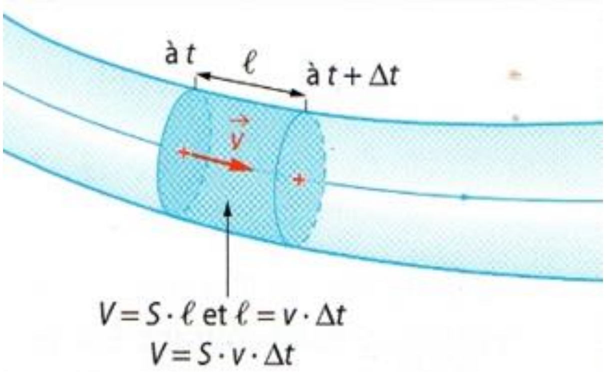


Figure 5 : Volume V et vitesse v d'un fluide traversant la section S d'un tube

Remarque : En régime permanent, le débit volumique d'un fluide est constant au cours du temps.

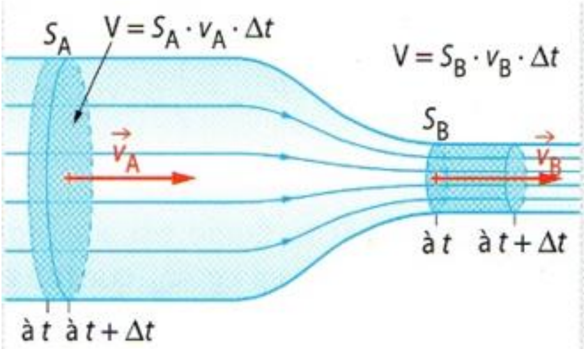
③ Conservation du débit volumique

En **régime permanent**, il y a **conservation du début volumique** pour un fluide **incompressible** le long d'un écoulement :

$$D_v = S \times v = constante$$

Conséquence : Plus la section d'un tube est étroite, plus la vitesse du fluide est élevée. *(→ voir figure 6)*

Figure 6 : Pendant la durée Δt, le même volume V de fluide traverse les sections S_A et S_B.



Exemple :
La vitesse d'écoulement de l'eau est triplée lorsque l'aire de la section d'un tuyau d'arrosage est divisée par 3.
Si $\frac{S_A}{S_B} = 3$ *alors* $v_B = \frac{S_A}{S_B} \times v_A = 3 \times v_A$

IV. Relation de Bernoulli et conséquences

① Relation de Bernoulli

Pour l'écoulement d'un fluide incompressible en régime permanent sans frottements, le long d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$P + \rho.g.z + \frac{1}{2}.\rho.v^2 = constante$$

P : pression du fluide (en Pa)
ρ : masse volumique du fluide (en kg.m^{-3})
g : intensité du champ de pesanteur (en m.s^{-2})
z : altitude du point du fluide (en m)
v : vitesse du point du fluide (en m.s^{-1})

La **relation de Bernoulli** relie en toute position du fluide appartenant à une même ligne de courant, la **pression** P, la valeur de la **vitesse** v et l'**altitude** z de la position.

Remarques :

1- La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie totale d'un fluide le long d'une ligne de courant.

→ *voir la vidéo « Bernoulli » pour plus de détails*

2- Elle permet d'interpréter le comportement des fluides dans de nombreux domaines : les écoulements sanguins en médecine, le mouvement des masses d'air et d'eau en géophysique, les flux d'air en aéronautique, l'écoulement de l'eau dans les réseaux d'alimentation.

3- Dans le cas d'un fluide au repos, la vitesse de chaque point du fluide est nulle. La relation s'écrit alors : $P + \rho.g.z + \frac{1}{2}.\rho.v^2 = constante$
On retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides.

Exemple : La vitesse de l'eau en sortie du robinet d'une installation domestique alimentée par un château d'eau peut être estimée à partir de la relation de Bernoulli.

→ voir figure 7

$$P_A + \rho.g.z_A + \frac{1}{2}.\rho.{v_A}^2 = P_B + \rho.g.z_B + \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2$$

$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho.g.h + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2 = \rho.g.h$$

$$\Rightarrow \quad {v_B}^2 = 2.g.h$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

Pour une hauteur h de 10 m,

$v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8\, m.s^{-2} \times 10\, m}$ $\qquad \boldsymbol{v_B = 14\, m.s^{-1}}$

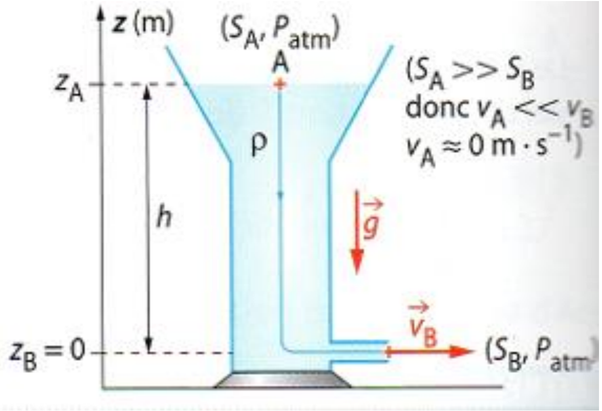


Figure 7 : La vitesse v_B de l'eau du robinet dépend de la hauteur d'eau h dans le château.

② **Conséquence : effet Venturi**

Dans le cas d'un conduit horizontal, $z_A = z_B$ et la relation de Bernoulli s'écrit :

$$P + \frac{1}{2}.\rho.v^2 = constante$$

Soit : $P_A + \frac{1}{2}.\rho.{v_A}^2 = P_B + \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2$

$$\Rightarrow (P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho \times \left({v_B}^2 - {v_A}^2\right)$$

Donc, si $v_B > v_A$ alors $P_B < P_A$

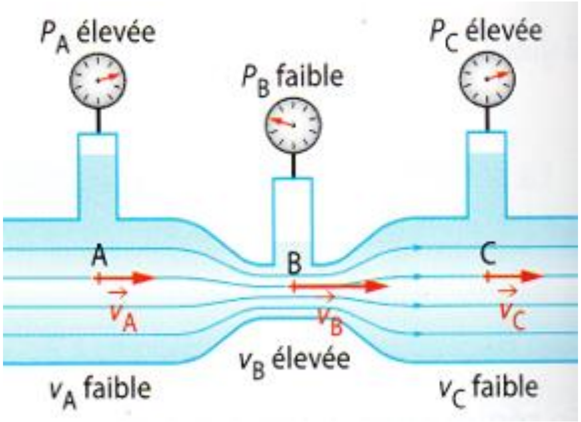


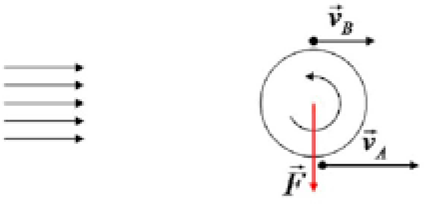
Figure 8 : L'effet Venturi

Effet Venturi : Pour un écoulement en régime permanent, la **pression $\boldsymbol{P}$** d'un fluide **diminue** lorsque sa **vitesse $\boldsymbol{v}$ augmente** (et inversement).

<u>Remarque</u> : Dans de nombreux sports (tennis, foot, golf, ...), l’effet Magnus est à l’origine de trajectoires surprenantes. En imposant un mouvement de rotation (« un effet ») à une balle se déplaçant dans l’air (=le fluide), la vitesse de l’air va augmenter d’un côté de la balle et diminuer de l’autre. Il en résulte une différence de pression de l’air entre les deux côtés de la balle et une action mécanique de l’air sur la balle qui modifie son mouvement.

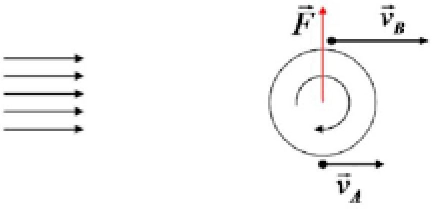
<u>Les effets au tennis</u>

Effet = rotation de la balle lors de la frappe *Trajectoire de la balle*



Balle liftée

Pas de rotation de balle
⇒ trajectoire parabolique
(si frottements négligés)



Balle slicée
(coupée)

Sens de déplacement de la balle