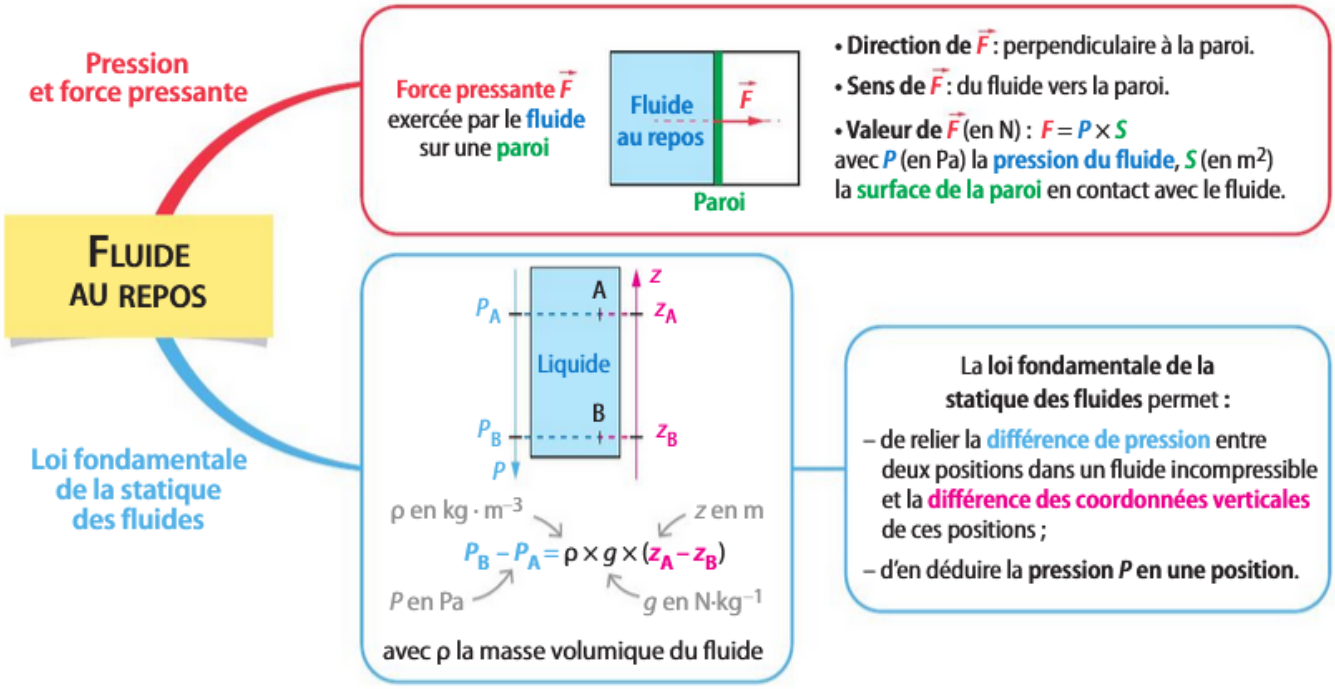
Cours : Modélisation de l'écoulement d'un fluide

I- Rappel de première



Rque :

Autre écriture : $p_B = p_A + \rho.g.h$ ce qui revient à dire que la force de pression exercée par un fluide sur une surface S en un point B de basse altitude = force de pression sur la même surface S en un point A plus haut + le poids de la colonne de fluide de hauteur $h = (Z_A - Z_B)$ au-dessus de la surface S ;

$F_B = F_A + m.g = F_B = F_A + \rho.h.S.g$

II- La poussée d'Archimède

1- Origine de la poussée d'Archimède

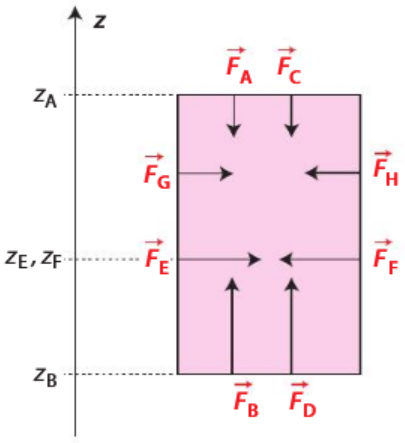
La poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_P}$ est la somme des forces pressantes exercées par un fluide au repos sur la partie immergée d'un corps, solide ou fluide.

D'après la loi fondamentale de la statique des fluides

$$p_B - p_A = \rho_{fluide} \times g \times (Z_A - Z_B)$$

La pression est identique en des points de même coordonnées verticales sur la surface du solide.
Ainsi les forces pressantes (F=pxS) en ces points sont identiques également et se compensent 2 à 2.
$F_E = F_F$ et $F_G = F_H$ et $F_A = F_C$ et $F_B = F_D$.

En revanche en des points d'altitudes différentes, la pression change : à l'altitude Z_A la pression est plus faible qu'à l'altitude Z_B : $p_A < p_B$

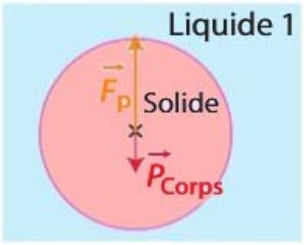


Forces pressantes sur un solide immergé

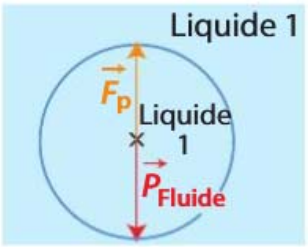
Ainsi $F_B > F_A$ et $F_E > F_G$

Au final, dans un fluide au repos, la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure d'un corps immergé est à l'origine de la poussée d'Archimède. La résultante de ces forces de pressions est globalement dirigée vers le haut.

2- Expression vectorielle de la poussée d'Archimède



Un corps immergé dans un fluide est soumis à son poids $\vec{P}_{fluide}$ et à la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_P}$. Ce corps remonte si la valeur de son poids est inférieure à la valeur de la poussée d'Archimède.



Si on retire le corps immergé, un élément de fluide de même forme et de même volume prend sa place. Cette portion de fluide est en équilibre, soumise à son poids $\vec{P}_{fluide}$ et à la même poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_P}$.
D'après le principe d'inertie, si ce corps est à l'équilibre les forces se compensent donc $\vec{P}_{fluide} + \overrightarrow{F_P} = \vec{0}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{F_P} = -\vec{P}_{fluide} = -m_{fluide} \times \vec{g}$

$$\overrightarrow{F_P} = -\rho_{fluide} \times V_{fluide} \times \vec{g}$$

Le volume V_{fluide} **de fluide déplacé** est égal au **volume immergé** V_{im} du corps.

$$\overrightarrow{F_P} = -\rho_{fluide} \times V_{im} \times \vec{g}$$

Définition

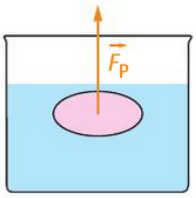
« Tout corps plongé dans un fluide (gaz, liquide) au repos, subit de la part de ce fluide une force de poussée $\overrightarrow{F_P}$ *de direction verticale, dirigée vers le haut, dont la valeur est égale au poids du volume de fluide déplacé.* »

Son expression vectorielle s'exprime par la relation :

ρ_{fluide} en $kg \cdot m^{-3}$; V_{im} en m^3

$$\vec{F}_P = -\rho_{fluide} \times V_{im} \times \vec{g}$$

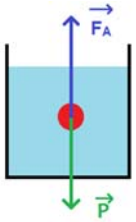
Valeur en N ; Valeur en $N \cdot kg^{-1}$



avec :
- ρ_{fluide} la masse volumique du fluide ;
- V_{im} le volume immergé du corps ;
- g l'intensité de la pesanteur.

Rque : on peut prendre les volumes en Litre si la masse volumique est en (en kg.L-1)

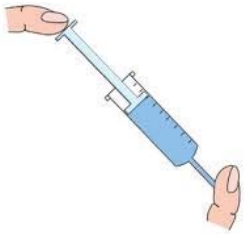
Conséquence :
- Un objet flotte si son poids P < F_P.
- L'objet coule si P > F_P
- L'objet se situe entre deux eaux, dans le cas limite où P = F_A (voir ci-contre)



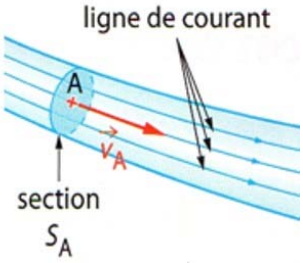
III- La conservation du débit volumique

1- Fluide incompressible et Régime permanent indépendant du temps

Un **fluide incompressible** est placé dans un piston, si on appuie sur le piston, le volume du fluide ne varie pas.
La masse volumique d'un fluide incompressible est constante.

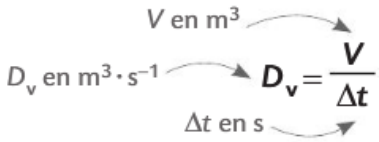


Un fluide s'écoule en régime permanent indépendant du temps (ou **régime permanent stationnaire**), si la valeur v de sa vitesse en chaque position est indépendante du temps.



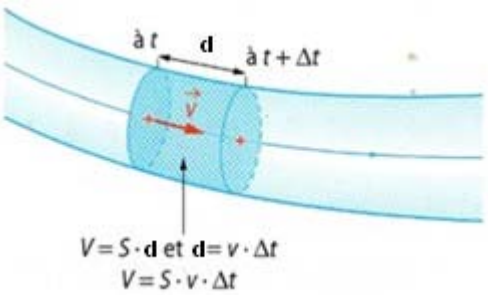
2- Débit volumique

En régime permanent stationnaire, lorsqu'un volume V de fluide s'écoule au travers d'une section pendant une durée Δt, le débit volumique D_V est donné par :



Expression en fonction de la vitesse du fluide :

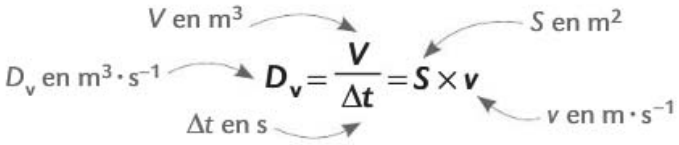
Pendant la durée Δt, le fluide qui travers la section S parcourt la distance d avec une vitesse de valeur v, alors $v = \frac{d}{\Delta t}$



Le volume de fluide écoulé à travers cette section est :
V = S x d

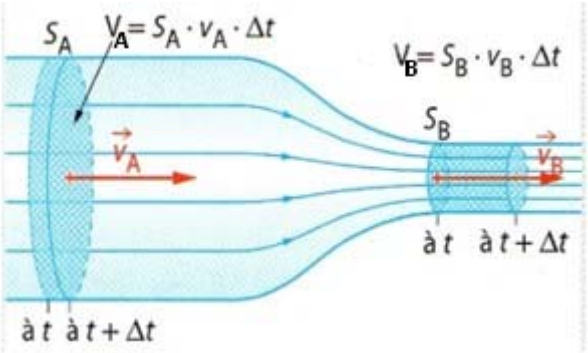
Le débit volumique $D_V = \frac{V}{\Delta t} = \frac{S \times d}{\Delta t} = S \times v$

Le débit volumique D_V est égal au produit de la surface S de la section du tube traversée par le fluide, par la valeur de la vitesse du fluide au niveau de cette section.



. 3- Conservation du débit volumique d'un fluide incompressible

Un fluide **incompressible** s'écoule en **régime permanent stationnaire** dans une canalisation constituée de 2 tubes de sections différentes.
On constate que le volume V_A de fluide se déplaçant dans la canalisation de section S_A est identique au volume V_B de fluide se déplaçant dans la canalisation de section S_B pendant le même intervalle de temps Δt.



Ainsi puisque V_A=V_B, le débit volumique $D_V = \frac{V_A}{\Delta t} = \frac{V_B}{\Delta t}$ **ne varie pas, il se conserve.**

$$D_{VA} = D_{VB} \quad donc \quad S_A \times v_A = S_B \times v_B$$

Conséquence :

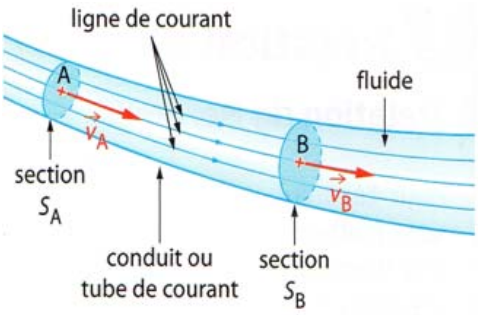
Si $S_A > S_B \quad alors\ v_B > v_A$

Pour un écoulement permanent stationnaire d'un fluide incompressible, si la section S d'une canalisation diminue, pour un débit volumique D_V constant, la vitesse v du fluide augmente car $D_V = S \times v$.

ex : on pince l'extrémité d'un tuyau pour augmenter la vitesse du fluide.

IV- La relation de Bernoulli

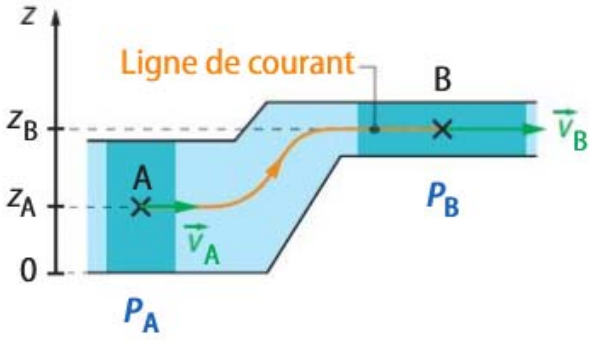
1- Ligne de courant



Une ligne de courant est la trajectoire d'une particule de fluide au cours d'un écoulement permanent et stationnaire.
Elle est orientée dans le sens de déplacement du fluide.

2- Relation de Bernoulli

Soit un fluide incompressible en régime permanent et stationnaire.
Considérons un élément de ce fluide **le long d'une ligne de courant**.



Il est soumis à des forces conservatives (poids) et non conservatives (frottements + forces pressantes)
On considère un fluide parfait donc on néglige les forces de frottements.

On peut donc lui appliquer le théorème de l'énergie mécanique.

$$\Delta E_{m(AB)} = E_m(B) - E_m(A) = \sum_i W_{AB}\left(\overrightarrow{f_{NC}}\right)$$

Les forces pressantes sont les seules forces non -conservatives, on admettra que leur travail se calcule par la relation :

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = p_A \times V_A - p_B \times V_B$$

avec p la pression et V le volume de l'élément de fluide considéré

Ainsi le théorème de l'énergie mécanique devient :

$$\Delta E_{m(AB)} = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}\left(\vec{F}\right)$$

soit

$$E_m(B) - E_m(A) = p_A \times V_A - p_B \times V_B$$
$$E_c(B) + E_p(B) - (E_c(A) + E_p(A)) = p_A \times V_A - p_B \times V_B$$
$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mg(z_B) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(z_A)\right) = p_A \times V_A - p_B \times V_B$$
$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mg(z_B) + p_B \times V_B - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(z_A) + p_A \times V_A\right) = 0$$

Ceci peut sécrire : $\frac{1}{2}mv^2 + mgz + p \times V = constante$ le long d'une ligne de courant

En divisant par V et sachnat que m = ρ.V on obtient

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = constante$$

La relation de Bernoulli relie en toute position du fluide appartenant à une même ligne de courant, la pression p, la valeur v de la vitesse et la coordonnée verticale z de la position.

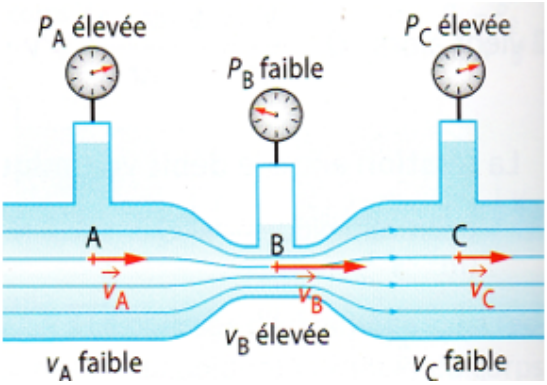
Rque : si le fluide est au repos on retrouve la loi de la statique des fluides :

$$\rho gz + p = constante$$

soit entre A et B, $\rho g(z_B) + p_B = \rho g(z_A) + p_A$ ou $p_B = p_A + \rho g(z_A - z_B)$

3- Effet Venturi

On peut appliquer la relation de Bernoulli à l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tube dont la section se resserre entre A et B.



$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(z_B) + p_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g(z_A) + p_A$$

Ici $z_A = z_B$ donc l'expression devient

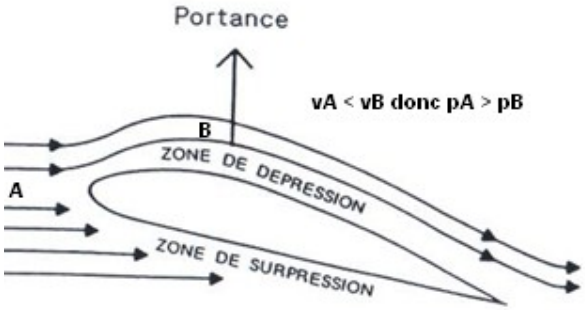
$$\frac{1}{2}mv_B^2 + p_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + p_A$$

Le débit volumique étant conservé, la valeur de la vitesse en A est supérieure à celle en B : $v_B > v_A$

Ceci implique que $p_B < p_A$

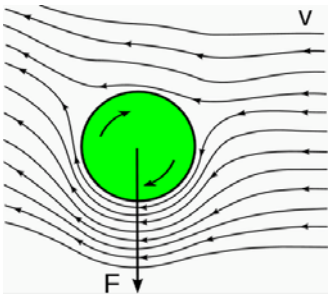
C'est **l'effet Venturi**

Application



4- Effet Magnus

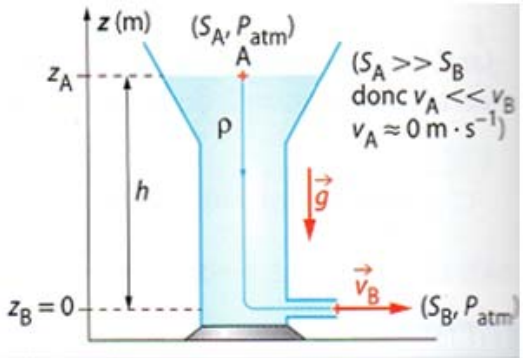
Rotation d'une balle entraine une augmentation de la vitesse du fluide et donc une dépression ce qui dévie la trajectoire de la balle (dans le sens de la rotation)



5- *Relation de Torricelli* :

La vitesse de l'eau en sortie du robinet d'une installation domestique alimentée par un château d'eau peut être estimée à partir de la relation de Bernoulli.

$$P_A + \rho.g.z_A + \frac{1}{2}.\rho.{v_A}^2 = P_B + \rho.g.z_B + \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2$$



On considère que v_A est nulle et $p_A = p_B = p_{atm}$

$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho.g.h + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}.\rho.{v_B}^2 = \rho.g.h$$

$$\Rightarrow \quad {v_B}^2 = 2.g.h$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

Pour une hauteur h de 10 m,

$v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8\ m.s^{-2} \times 10\ m}$ $\quad \boldsymbol{v_B = 14\ m.s^{-1}}$